

Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени
Гагарина Ю.А.»

И.А. Челышева

РЕШЕНИЕ ПОЗИЦИОННЫХ И МЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Методические указания
к решению задач по дисциплине «Начертательная геометрия»
для студентов направлений

09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
09.03.04 «Программная инженерия»
15.03.02 «Технологические машины и оборудование»
15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных
производств»
18.03.01 «Химическая технология»
21.03.01 «Нефтегазовое дело»
29.03.05 «Конструирование изделий легкой промышленности»

очной и заочной форм обучения

Энгельс 2024

ВВЕДЕНИЕ

При выполнении студентами расчетно-графической работы встречаются существенные трудности, поэтому в организации самостоятельной работы основной задачей преподавателя является оказание методической помощи студенту.

В данном методическом указании информационный материал проиллюстрирован, разработаны примеры решения задач с подробными пояснениями.

Изображения, построенные по правилам, изучаемым в начертательной геометрии, позволяют представить мысленно форму предметов и их взаимное расположение в пространстве, определить их размеры.

Правила построения изображений основаны на методе проекций. Рассмотрение метода проекций начинают с построения проекций точек, так как при построении изображения любой пространственной формы рассматривается ряд точек, принадлежащих этой форме.

Изображение предмета на нескольких совмещенных плоскостях называют комплексным чертежом (эпюром). На рис. 1 изображено наглядное изображение точки и эпюр.

$A_2 A_X$ – высота точки A ;

$A_1 A_X$ – глубина точки A ;

$A_1 A_Y$ – ширина точки A .

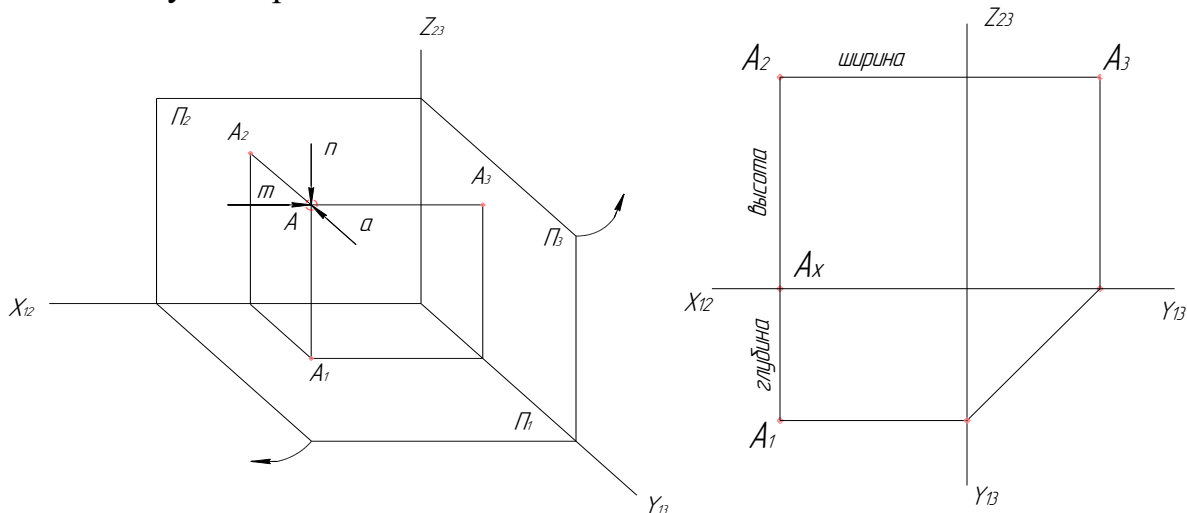


Рис. 1

На рис. 2 выполнен эпюр точки $B \in \Pi_2$ (точка B лежит в плоскости Π_2). Глубина точки ($УВ$) равна нулю.

На рис. 3 показана точка $C \in Z$ (точка C принадлежит оси Z), точка C не имеет глубины и ширины.

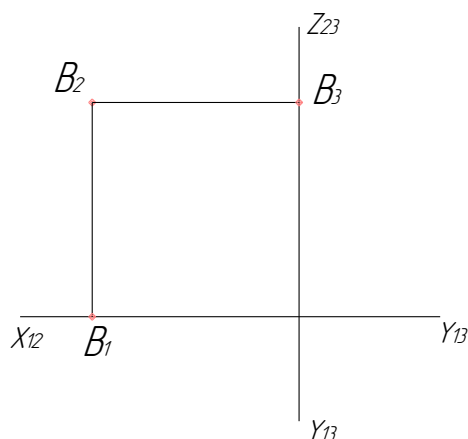


Рис. 2

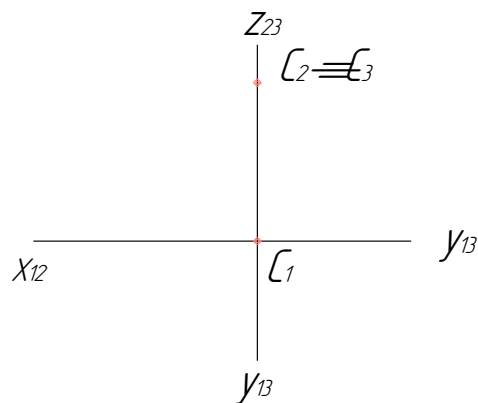


Рис. 3

ПРЯМАЯ

Прямая общего положения – прямая не параллельная ни одной из плоскостей проекций, на рис. 4 изображены три проекции отрезка АВ прямой общего положения.

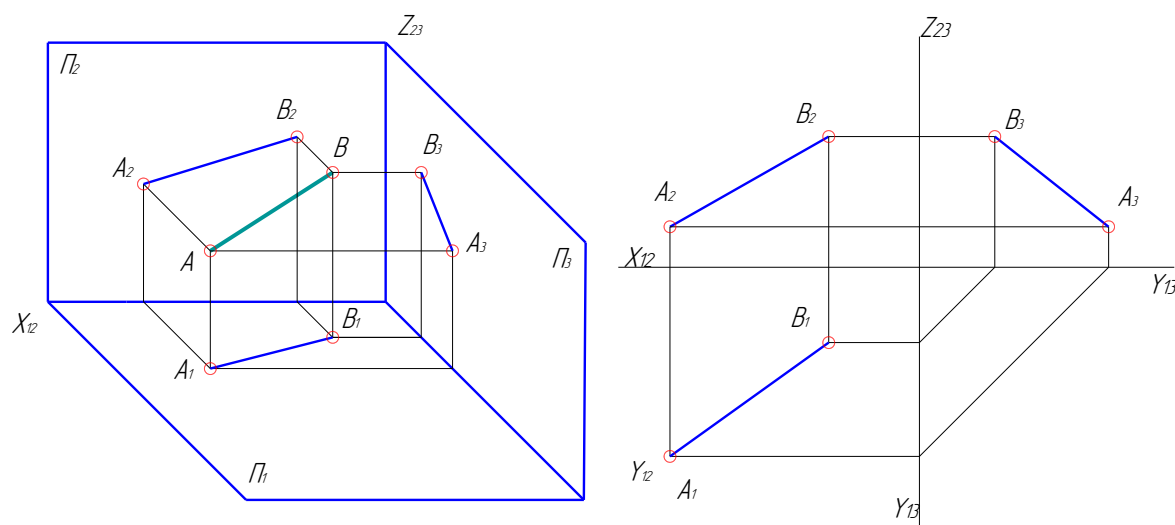


Рис. 4

Прямые частного положения – прямые уровня и проецирующие прямые.

Прямая уровня – прямая, параллельная одной плоскости проекций (рис. 5).

Проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная плоскости проекций (рис. 6).

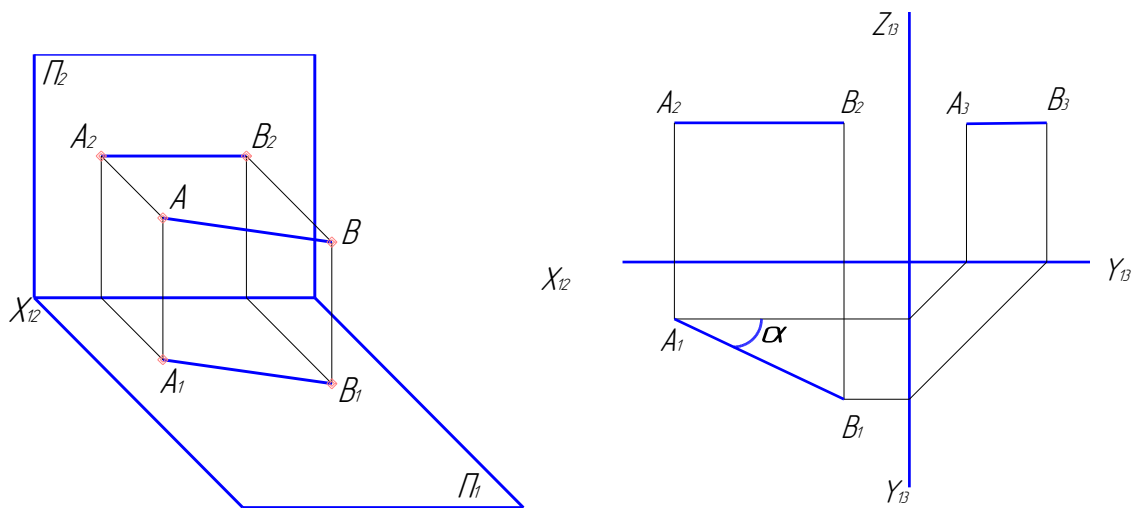


Рис. 5

$AB \parallel \Pi_1$; $A_2B_2 \parallel X_{12}$, т.е. $Z_A = Z_B$; A_1B_1 – натуральная величина отрезка;
 α – угол наклона AB к Π_2 .

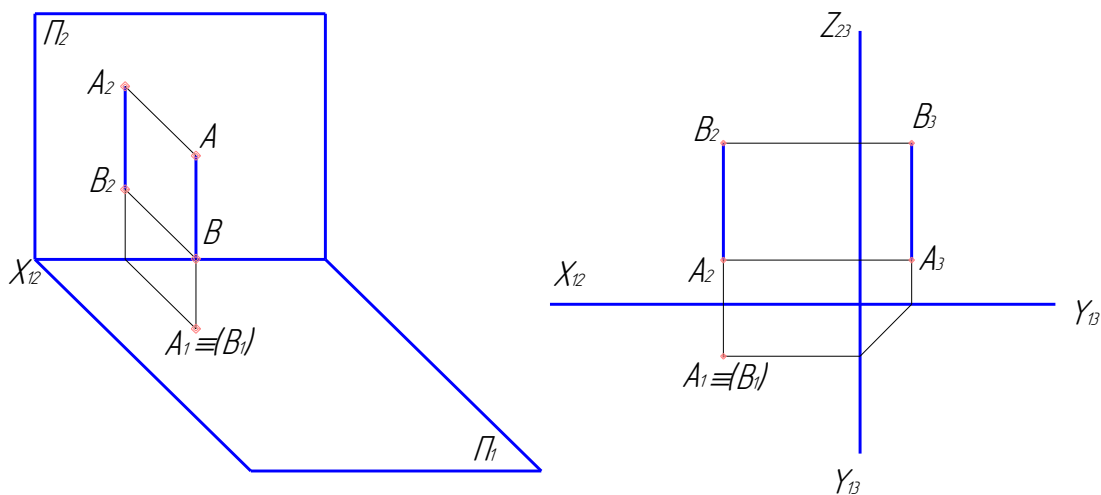


Рис. 6

$AB \perp \Pi_1$; A_1B_1 – вырожденная проекция, $A_2B_2 \parallel Z$, $A_3B_3 \parallel Z$.

ПЛОСКОСТЬ

Плоскость общего положения – плоскость не параллельная ни одной из плоскостей проекций (рис. 7).

Плоскости частного положения:

а) плоскости уровня – плоскости, параллельные одной плоскости проекций (рис. 8);

б) проецирующие плоскости – плоскости, перпендикулярные плоскости проекций (рис. 9).

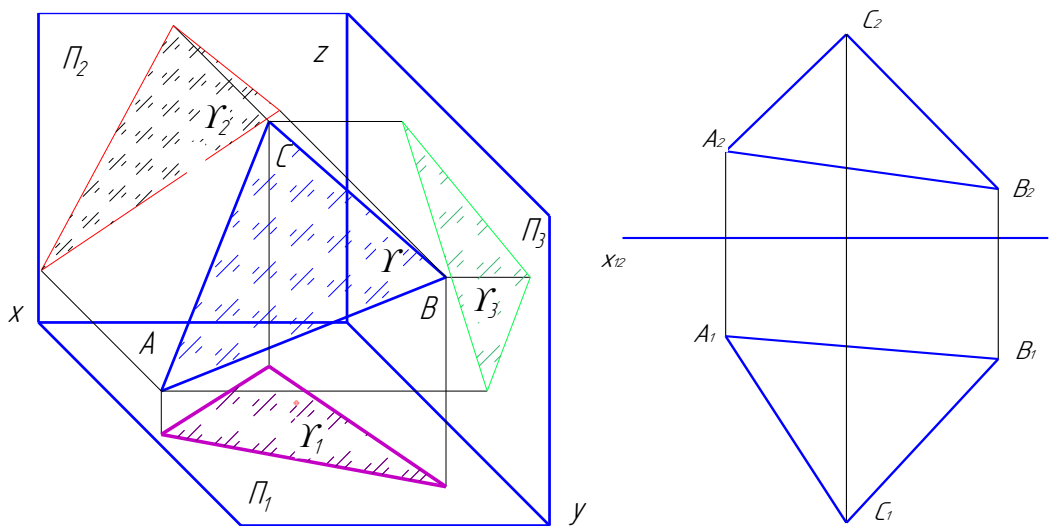


Рис. 7

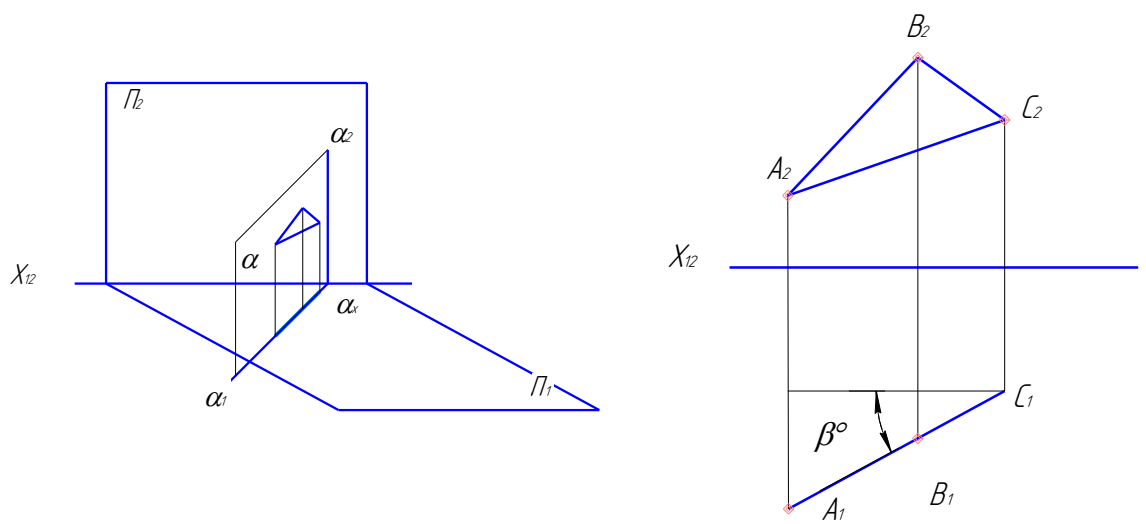


Рис. 8

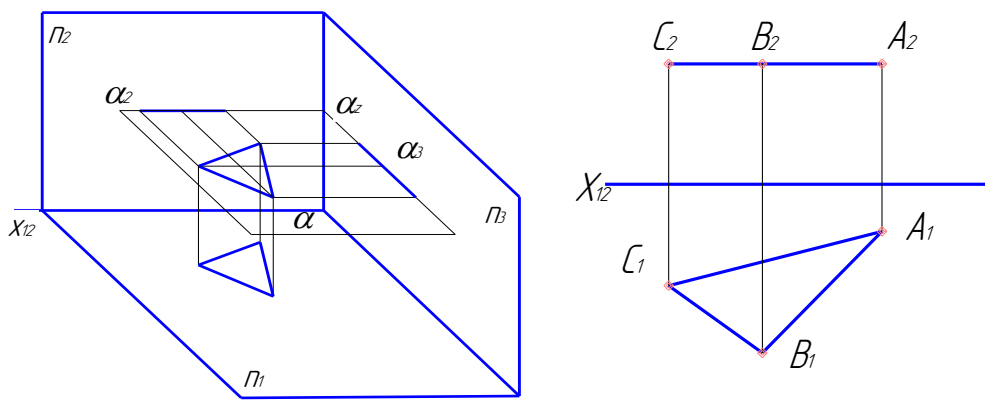


Рис. 9

На рис. 8 $\alpha \perp \Pi_1$. Проецирующая плоскость изображается прямой линией на той плоскости проекции, к которой она перпендикулярна.

β° – угол наклона плоскости α к плоскости Π_2 .

На рис. 9 $\alpha \parallel \Pi_1$, ΔABC проецируется на плоскость Π_1 без искажения.

Относительное положение точки и прямой

Если точка A принадлежит прямой, то проекции ее лежат на одноименных проекциях прямой (рис. 10).

$A \in b$, т.к. $A_1 \in b_1$, $A_2 \in b_2$.

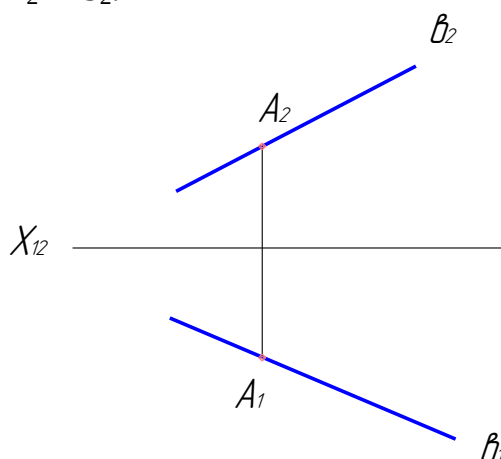


Рис. 10

Относительное положение точки, прямой и плоскости.

а) прямая принадлежит плоскости, если она проходит через 2 точки, лежащие этой плоскости (рис. 11).

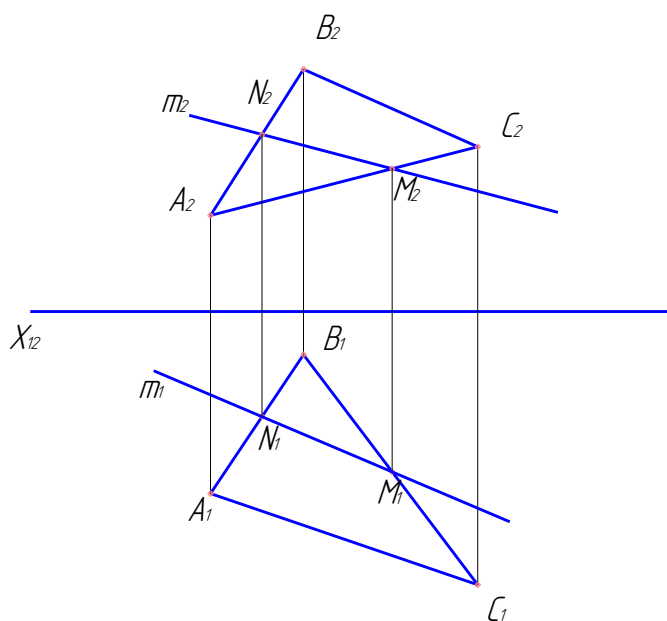


Рис. 11

б) точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой лежащей в этой плоскости (рис. 12).

$a \in \alpha(m \parallel n), A \in \alpha, \text{ т.к. } A \in a.$

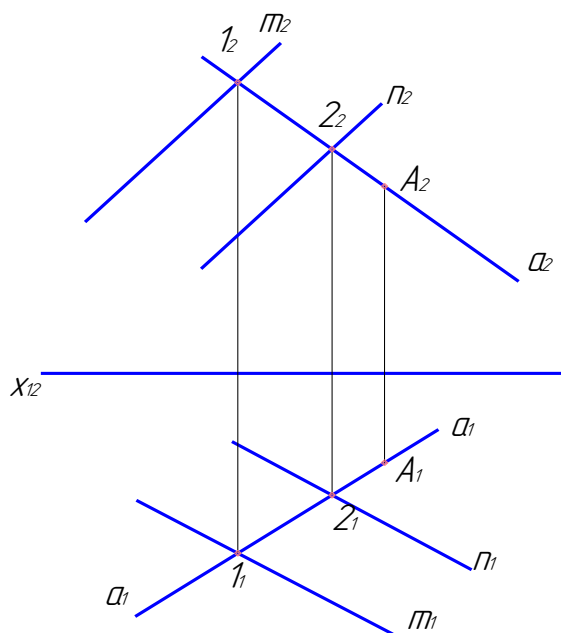


Рис. 12

ГЛАВНЫЕ ЛИНИИ ПЛОСКОСТИ

Горизонталь – прямая, лежащая в плоскости и параллельная плоскости Π_1 . Обозначается горизонталь – h (рис. 13).

$$h_2 \parallel X_{12}$$

$$h_2 \cap B_2 C_2 = 1_2 \rightarrow 1_1$$

через точки A_1 и 1_1 проводим h_1 .

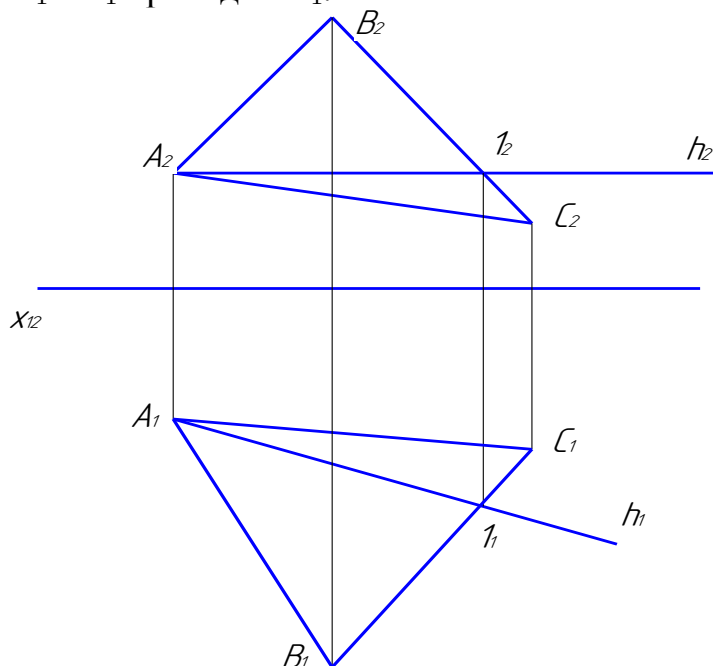


Рис. 13

Фронталь – прямая, лежащая в плоскости и параллельная плоскости Π_2 . Обозначается фронталь – f (рис.14).

$$f_1 \parallel X_{12}$$

$$f_1 \cap A_1 B_1 = 1_1 \rightarrow 1_2$$

проводим f_2 через точки 1_2 и C_2 .

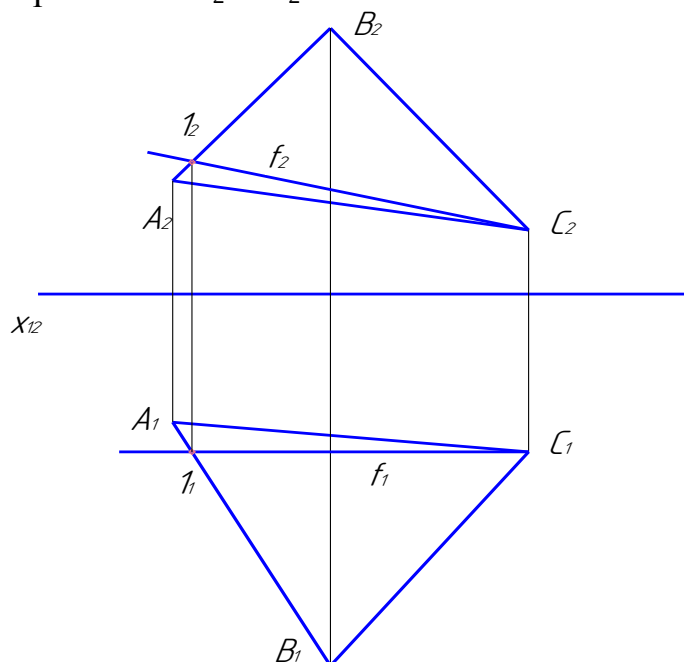


Рис. 14

МЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРЯМОЙ

Натуральная величина отрезка прямой и углы наклона ее к плоскостям проекций

Натуральная величина прямых частного положения определяется проекциями этих прямых.

Натуральную величину прямой общего положения можно определить с помощью прямоугольного треугольника (рис. 15).

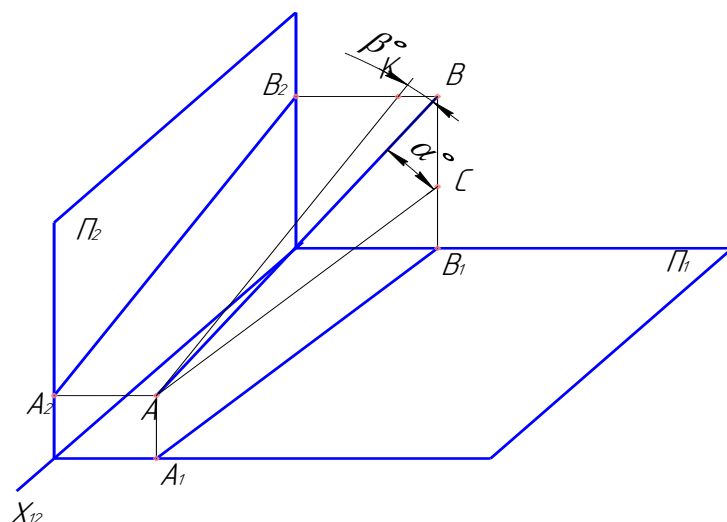


Рис. 15

Отрезок АВ занимает общее положение. В плоскости AA_1BB_1 , занимающей горизонтально проецирующее положение построим отрезок $AC \parallel A_1B_1$, получим прямоугольный треугольник ABC . В прямоугольном треугольнике ABC катет $AC = A_1B_1$; катет $BC = BB_1 - AA_1$; $BB_1 = Z_B$; $AA_1 = Z_A$; отсюда следует, что натуральная величина отрезка АВ есть гипотенуза прямоугольного треугольника, один катет которого равен проекции отрезка, а второй – разность расстояний концов отрезка до соответствующей плоскости проекции. α° – угол наклона отрезка АВ к плоскости Π_1 . Построение натуральной величины отрезка на эпюре показано на рис. 16.

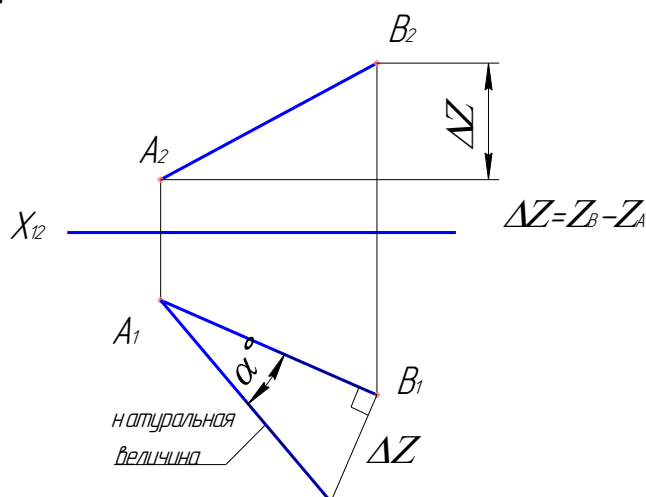


Рис. 16

Чтобы определить угол наклона отрезка АВ к плоскости Π_2 (угол β), надо построить прямоугольный треугольник, один катет которого – фронтальная проекция отрезка, а второй разность расстояний концов отрезка АВ до плоскости Π_2 .

Преобразование комплексного чертежа (метод замены плоскостей проекций)

Сущность метода замены плоскостей проекций заключается в том, что положение геометрической фигуры не изменяется, а вводится новая дополнительная плоскость, относительно которой геометрическая фигура занимает частное положение.

Рассмотрим шесть типовых задач, решаемых методом замены.

Задача 1: отрезок АВ прямой общего положения перевести в положение уровня.

Введем новую дополнительную плоскость Π_4 , параллельную отрезку АВ, при условии $\Pi_4 \perp \Pi_1$. В новой системе плоскостей $\frac{\Pi_1}{\Pi_4}$ проекция $A_1 B_1$ на плоскости Π_1 останется прежней, а проекция на Π_4 будет $A_4 B_4$. При замене плоскостей Π_2 на Π_4 не изменяются расстояния от точек А и В до плоскости Π_1 (высоты точек Z_A и Z_B).

При выбранном нами положении плоскости Π_4 новая ось X_{14} располагается параллельно $A_1 B_1$, а новая проекция $A_4 B_4$ может быть построена на эюре, если на соответствующих линиях связи точек А и В отложить от оси, высоты точек Z_A и Z_B (рис. 17).

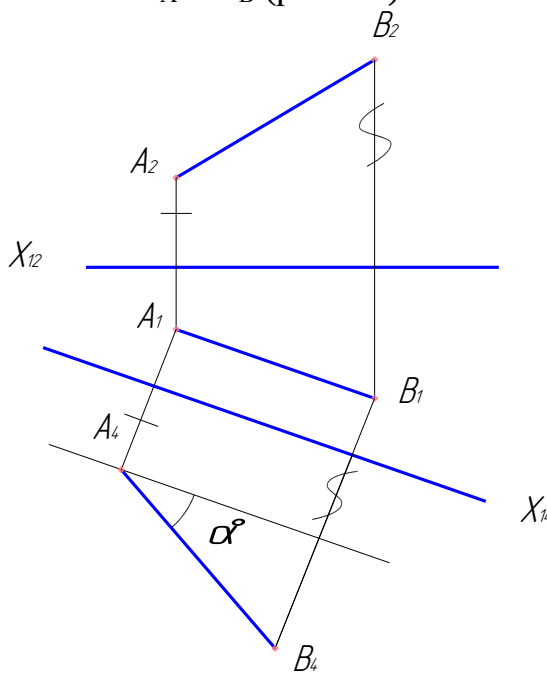


Рис. 17

Задача 2: прямую уровня перевести в проецирующее положение (рис. 18).

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} \rightarrow \frac{\Pi_1}{\Pi_4}; \Pi_1 \perp \Pi_4; \Pi_4 \perp AB$$

Проводится ось $X_{14} \perp A_1 B_1$ на любом расстоянии от проекции $A_1 B_1$ по линии связи отложим расстояние ($Z_A = Z_B$).

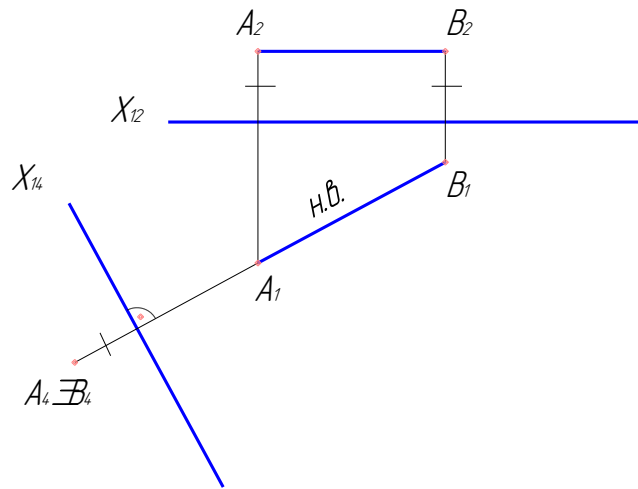


Рис. 18

Задача 3: прямую общего положения перевести в проецирующее положение.

Для решения этой задачи надо последовательно провести две замены (т.е. решить сначала задачу 1, затем задачу 2) (рис. 19).

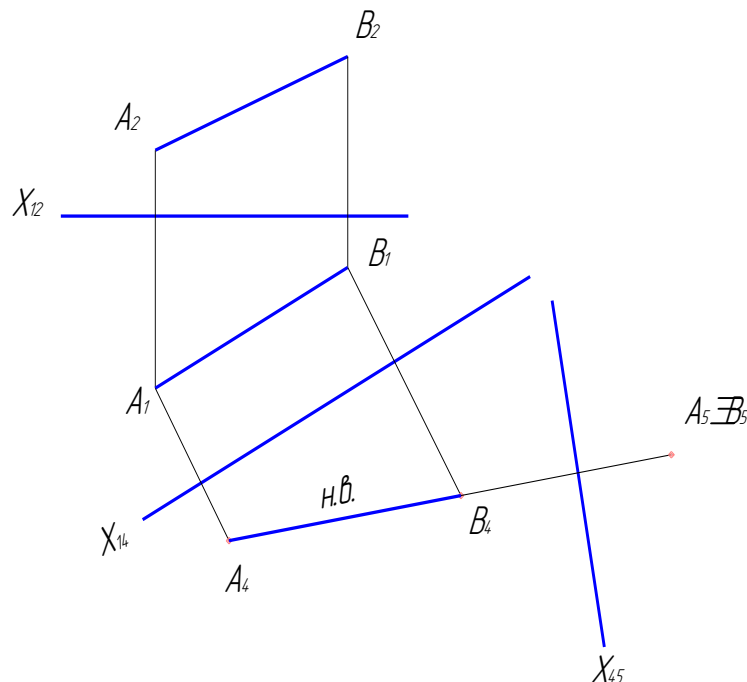


Рис. 19

Так, чтобы отрезок АВ прямой общего положения сделать горизонтально проецирующим, сначала переходим к системе $\frac{\Pi_1}{\Pi_4} (\frac{\Pi_1}{\Pi_2} \rightarrow \frac{\Pi_1}{\Pi_4})$, преобразуя прямую в прямую, параллельную плоскости Π_4 , а затем от системы $\frac{\Pi_1}{\Pi_4} \rightarrow$ переходим к системе $\frac{\Pi_5}{\Pi_4}$, сделав отрезок АВ прямой перпендикулярным к плоскости Π_5 .

Задача 4: плоскость общего положения перевести в проецирующее положение (рис. 20).

Для решения задачи построим в ΔABC горизонталь h , преобразуем систему $\frac{\Pi_1}{\Pi_2}$ в систему $\frac{\Pi_1}{\Pi_4}$; Π_4 перпендикулярна к плоскости ΔABC ; на чертеже проводим ось $X_{14} \perp h_1$.

α^0 – угол наклона плоскости к плоскости Π_1 .

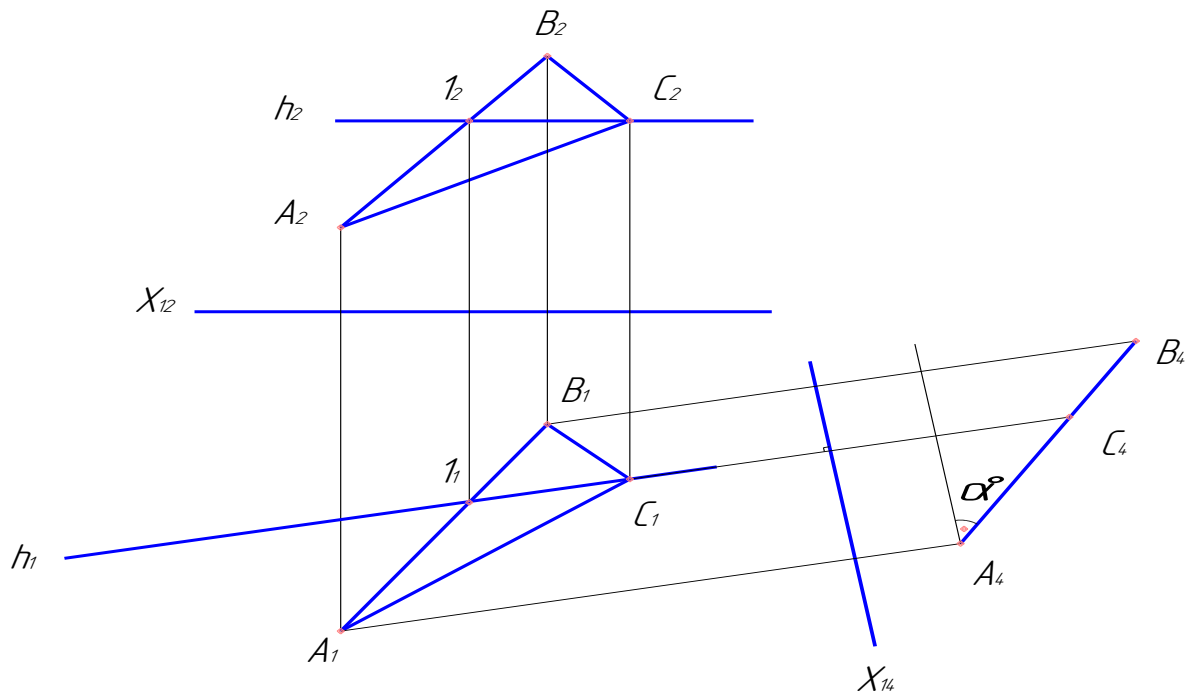


Рис. 20

Задача 5: проецирующую плоскость перевести в положение уровня (рис. 21).

Заменим плоскости Π_1 на Π_4 ; Π_4 расположена параллельно плоскости ΔABC . Проводим ось X_{14} параллельно $A_1B_1C_1$.

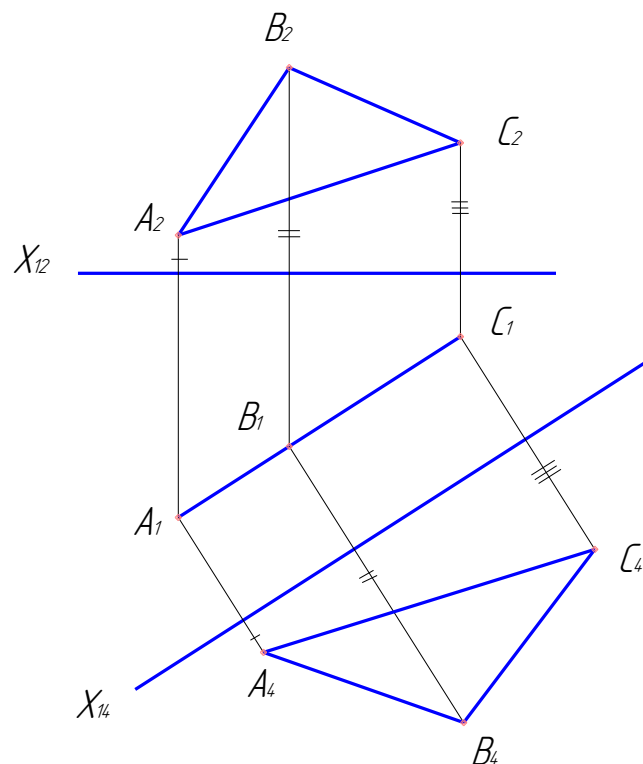


Рис. 21

Задача 6: плоскость общего положения перевести в положение уровня (рис. 22).

Чтобы решить эту задачу надо два преобразования, т.е. решить задачу 4, а затем задачу 5.

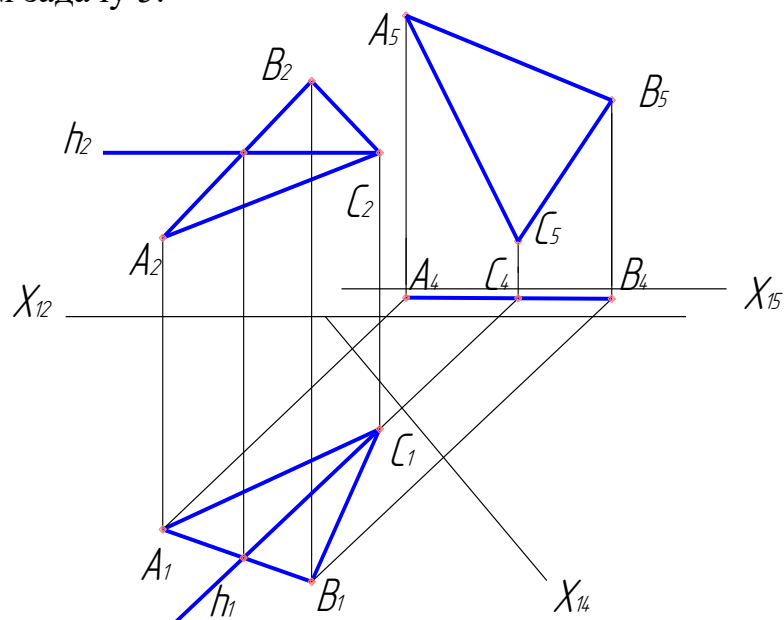


Рис. 22

Основные метрические задачи

Задача: а) Определить расстояние от точки до прямой. Чтобы решить эту задачу надо перейти из системы $\frac{\Pi_1}{\Pi_2}$ к системе $\frac{\Pi_1}{\Pi_4}$, т.е. преобразовав отрезок АВ прямой во фронтальное положение, а затем перейдя в новую систему $\frac{\Pi_4}{\Pi_5}$ преобразуем отрезок прямой в проецирующее положение.

Искомое расстояние равно отрезку ℓ .

а) прямая занимает частное положение – положение уровня (рис. 23).

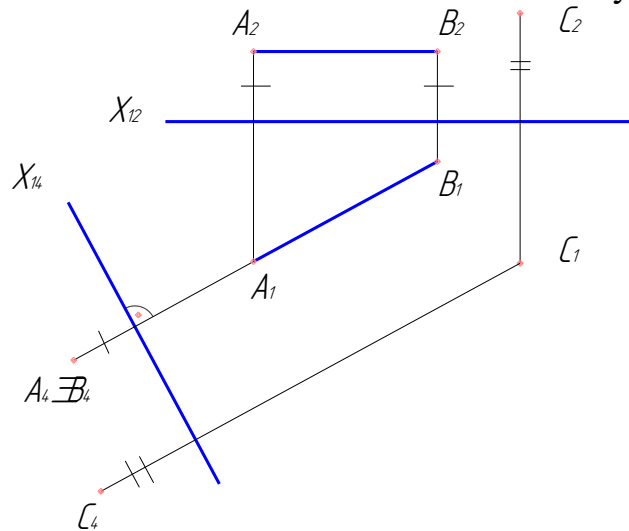


Рис. 23

В этом случае необходимо перевести заданную горизонтальную прямую во фронтально проецирующее положение. Искомое расстояние между точкой и прямой есть расстояние ℓ между вырожденной проекцией прямой и точкой.

б) прямая занимает общее положение (рис. 24).

Чтобы решить эту задачу надо выполнить две замены.

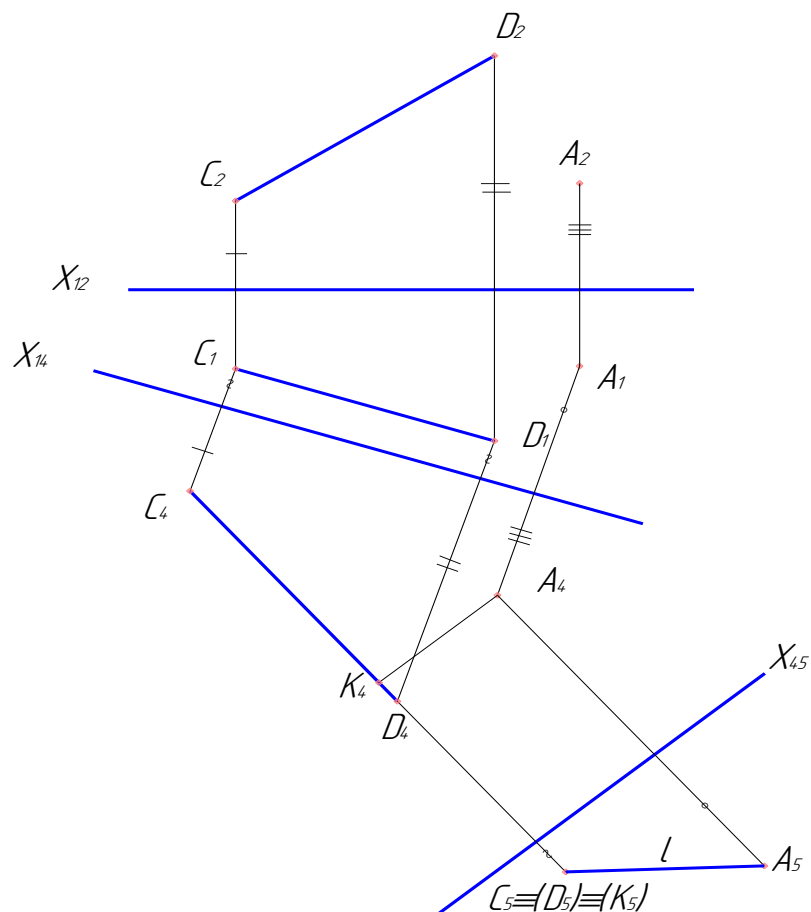


Рис. 24.

Задача: Определить расстояние между двумя параллельными прямыми.
а) прямые частного положения.

Заданные фронтальные прямые перевести в горизонтально проецирующее положение. Построить новую плоскость $\Pi_4 \perp AB$ (СД). На чертеже провести ось $X_{24} \perp A_2B_2$. Искомая натуральная величина расстояния между прямыми равна расстоянию l между вырожденными проекциями прямых на плоскости Π_2 (рис. 25).

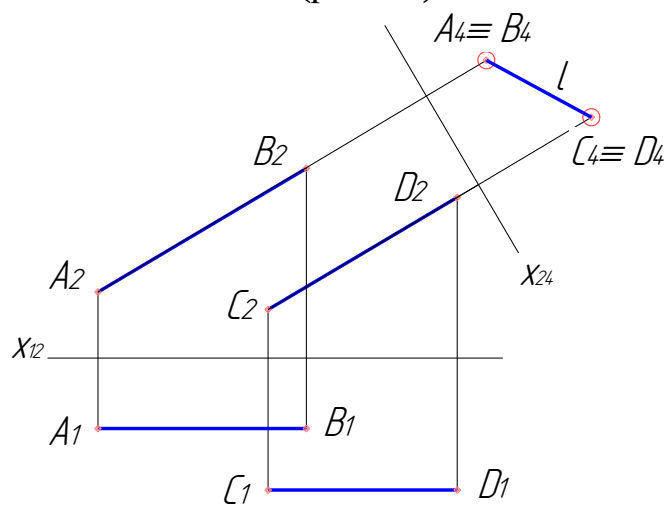


Рис. 25

б) прямые общего положения (рис. 26).

Данные прямые переведены в проецирующее положение.

При первой замене новая плоскость располагается параллельно заданным прямым и перпендикулярно к Π_1 , а при второй замене новая плоскость расположена перпендикулярно к прямым. Отрезок l между вырожденными проекциями прямых является искомой натуральной величиной расстояния между данными прямыми.

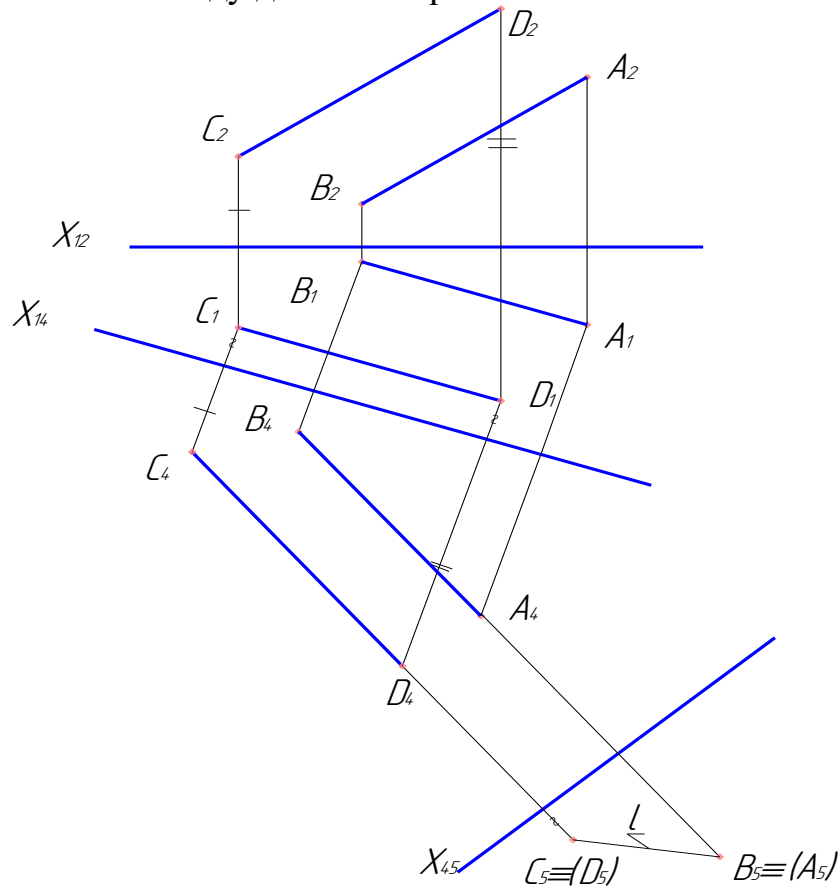
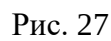


Рис. 26

Задача: определить расстояние между скрещивающимися прямыми
а) одна из прямых занимает проецирующее положение (рис. 27).



The diagram illustrates the construction of a 5D space X_5 from a 4D space X_4 . The 4D space X_4 is represented by a horizontal plane, and the 5D space X_5 is represented by a slanted plane below it. Points A_i, B_i, C_i, D_i are marked on the planes. Blue lines represent the construction of X_5 from X_4 . A green line segment labeled L is shown on the plane X_5 , representing the length of the 5D space.

Рис. 28

17

Для преобразования одной из прямых в проецирующую на эпюре проводим последовательную замену обеих заданных плоскостей проекций.

Заданные прямые АВ и СД сначала спроецированы на новую плоскость Π_4 , параллельную прямой СД. Затем прямые АВ и СД спроецированы на новую плоскость Π_5 , перпендикулярную к той же прямой СД. На плоскость Π_5 прямая СД проецируется в точку (C_5D_5), а расстояние l между проецирующими C_5D_5 и A_5B_5 является искомой величиной расстояния между данными АВ и СД.

Определение расстояния от точки до плоскости

Задача: определить расстояние от точки до плоскости, занимающей проецирующее расстояние (рис. 29).

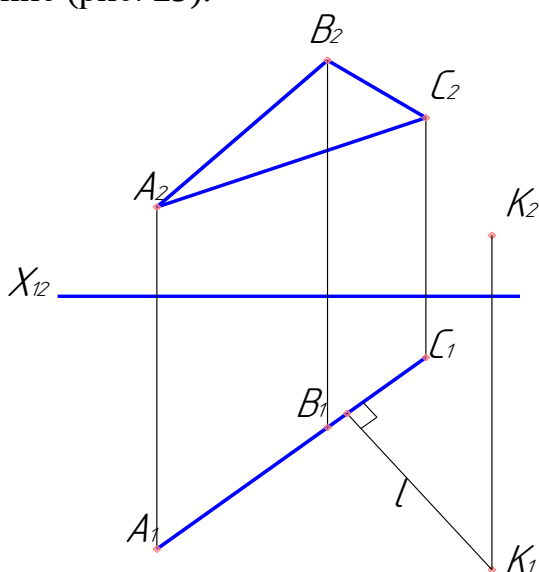


Рис. 29

Чтобы определить расстояние от точки до проецирующей плоскости, надо опустить перпендикуляр из точки на вырожденную проекцию плоскости (из горизонтальной проекции K_1 опускаем перпендикуляр на $A_1B_1C_1$)

Задача: определить расстояние от точки до плоскости общего положения (рис. 30).

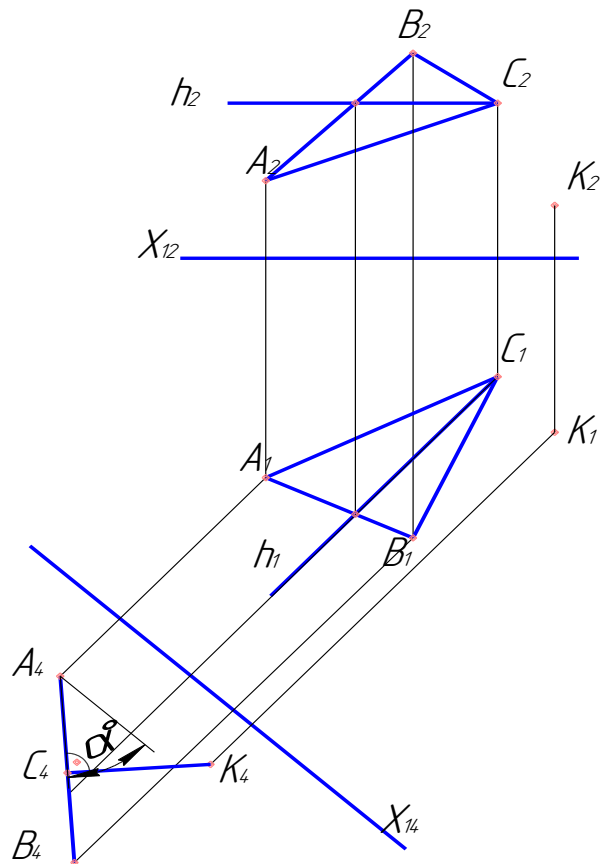


Рис. 30

Чтобы определить расстояние от точки K до плоскости общего положения заданной треугольником ABC , заменяем одну из плоскостей проекций в системе $\frac{\Pi_1}{\Pi_2}$

так, чтобы в новой системе $\frac{\Pi_1}{\Pi_4}$ треугольник занял проецирующее положение.

Проводим через вершину C ΔABC горизонталь h . Затем вводим новую плоскость Π_4 , перпендикулярную к плоскости ΔABC , на эюре проводим ось $X_{14} \perp h_1$, строим проекцию треугольника $A_4B_4C_4$ и затем из точки K_4 опускаем перпендикуляр на вырожденную проекцию треугольника. l – искомая натуральная величина расстояния от точки K до плоскости. Одновременно определим угол наклона (α°) ΔABC к плоскости проекций Π_1 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУГРАННОГО УГЛА

Двугранный угол между двумя пересекающимися плоскостями измеряется линейным углом (рис. 31).

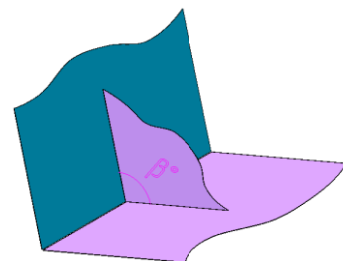


Рис. 31

Задача: определить двугранный угол, образованный пересечением плоскостей треугольников ABC и DBC (рис. 32,33).

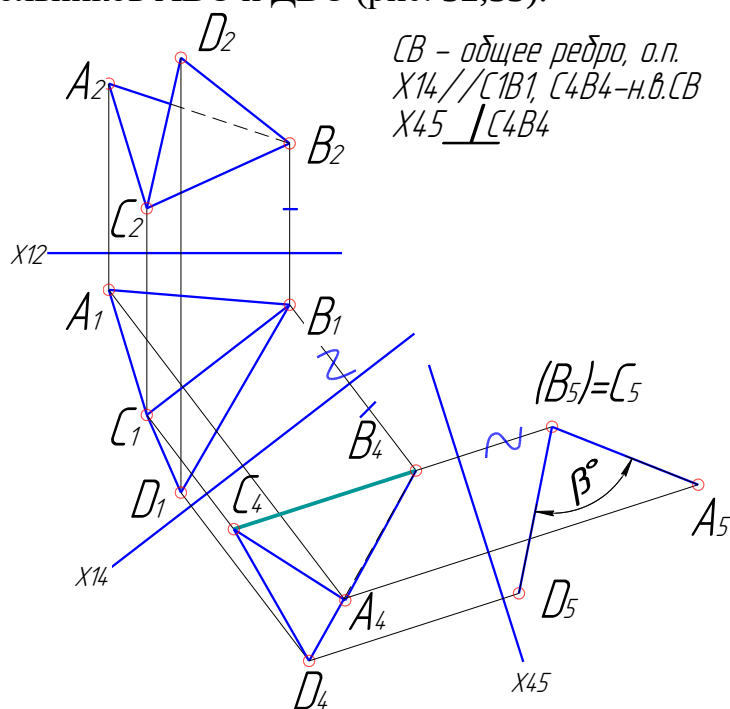


Рис. 32

При решении задачи надо определить, какое положение занимает общее ребро двугранного угла:

- а) частное положение – одна замена (рис. 33);
- б) общее положение – две замены (рис. 32).

Общее ребро надо в обоих случаях преобразовать в точку, а каждая из проекций треугольников является вырожденной (прямой). Угол β° между ними определяет величину двугранного угла между заданными плоскими фигурами.

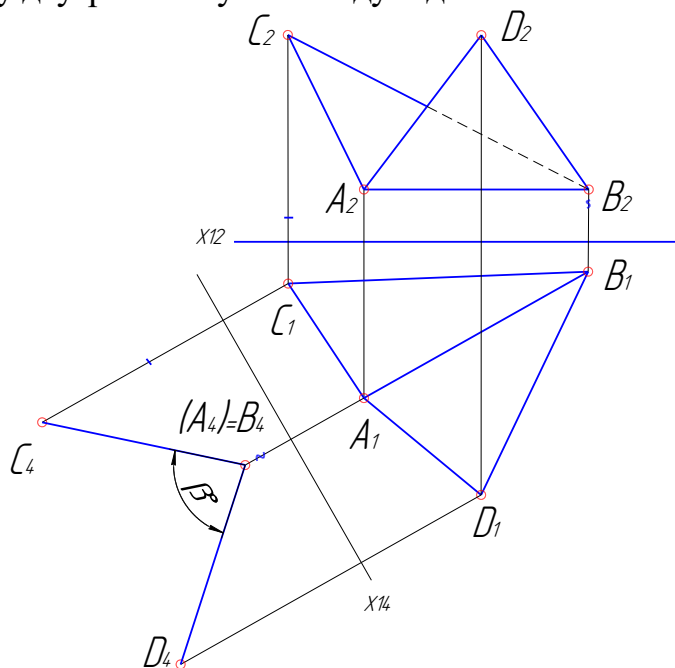


Рис. 33

СОДЕРЖАНИЕ РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ №1

Лист 1:

- 1) по заданным координатам построить 2 проекции треугольника ABC и отрезка прямой DE;
- 2) определить точку пересечения DE с плоскостью треугольника ABC, показать видимость DE.

Лист 2:

- 1) определить натуральную величину треугольника ABC методом замены плоскостей проекций и угол (α°) наклона треугольника ABC к плоскости Π_1 .

Лист 3:

- 1) построить линию пересечения пирамиды с плоскостью общего положения;
- 2) построить развёртку пирамиды с нанесением линии пересечения.

Лист 4:

- 1) определить натуральную величину двугранного угла, образованного боковыми гранями пирамиды.

Указания к решению задач РГР:

Работа выполняется в масштабе 1:1, на ватмане формат А3, варианты заданий даны в приложении 1 (табл. П1 и табл. П2).

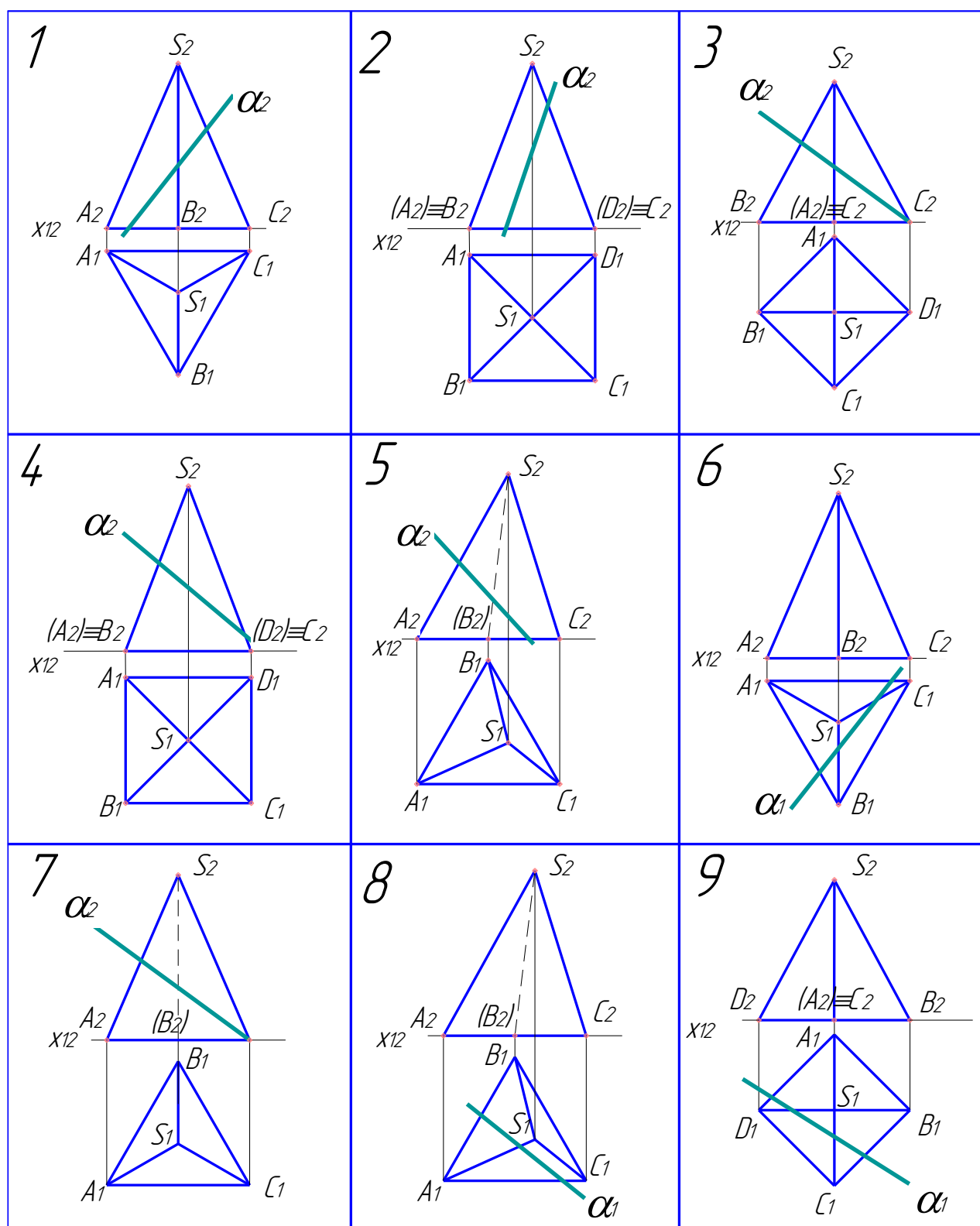
Образец выполнения РГР 1 дан в приложениях 2-5.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

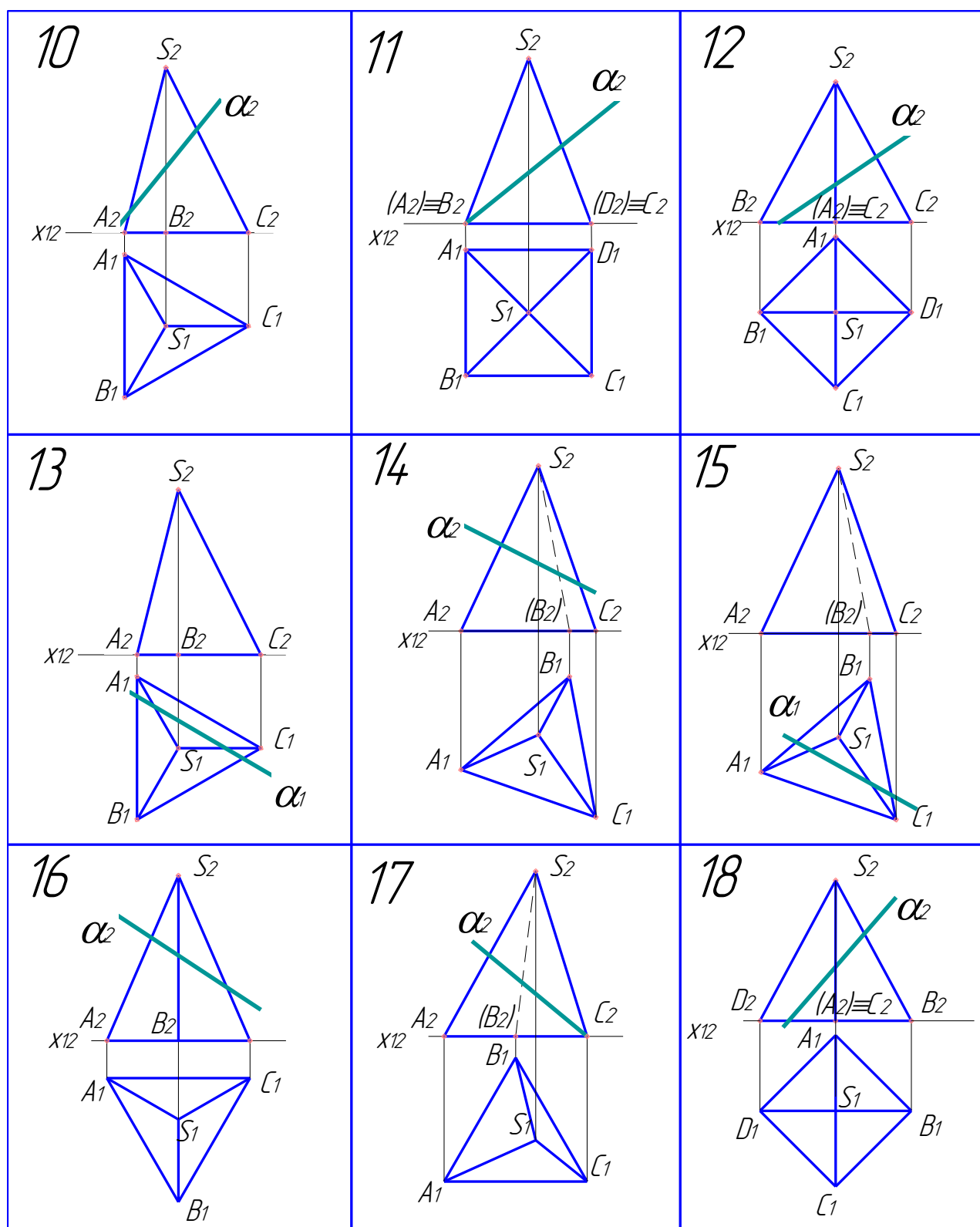
Таблица П1

№ варианта	X _A	Y _A	Z _A	X _B	Y _B	Z _B	X _C	Y _C	Z _C	X _D	Y _D	Z _D	X _E	Y _E	Z _E	X _K	Y _K	Z _K
1	117	90	9	52	25	79	0	83	48	68	110	85	135	19	36	14	52	0
2	120	90	10	50	25	80	0	85	50	70	110	85	135	20	35	15	50	0
3	115	90	10	52	25	80	0	80	45	65	105	80	130	18	35	12	50	0
4	120	92	10	50	20	75	0	80	46	70	115	85	135	20	32	10	50	0
5	117	9	90	52	79	25	0	48	83	68	85	110	135	36	19	14	0	52
6	115	7	85	50	80	25	0	50	85	70	85	110	135	20	20	15	0	50
7	120	10	90	48	82	20	0	52	82	65	80	110	130	38	20	15	0	52
8	116	8	88	50	78	25	0	46	80	70	85	108	135	36	20	15	0	52
9	115	10	92	50	80	25	0	50	85	70	85	110	135	35	20	15	0	50
10	18	10	90	83	79	25	135	48	83	67	85	110	0	36	19	121	0	52
11	20	12	92	85	80	25	135	50	85	70	85	110	0	35	20	120	0	52
12	15	10	85	80	80	20	130	50	80	70	80	108	0	35	20	120	0	50
13	16	12	88	85	80	25	130	50	80	75	85	110	0	30	15	120	0	50
14	18	12	85	85	80	25	135	50	80	70	85	110	0	35	20	120	0	50
15	18	90	10	83	25	79	135	83	48	67	110	85	0	19	36	121	52	0
16	18	40	75	83	117	6	135	47	38	67	20	0	0	111	48	121	78	86
17	17	75	40	83	6	107	135	38	47	67	0	20	0	48	111	121	86	78
18	117	75	40	52	6	107	0	38	47	135	0	20	68	48	111	15	86	78
19	117	40	75	52	107	6	0	47	38	135	20	0	68	111	48	15	78	86
20	120	38	75	50	108	5	0	45	40	135	20	0	70	110	50	15	80	85

Таблица П2

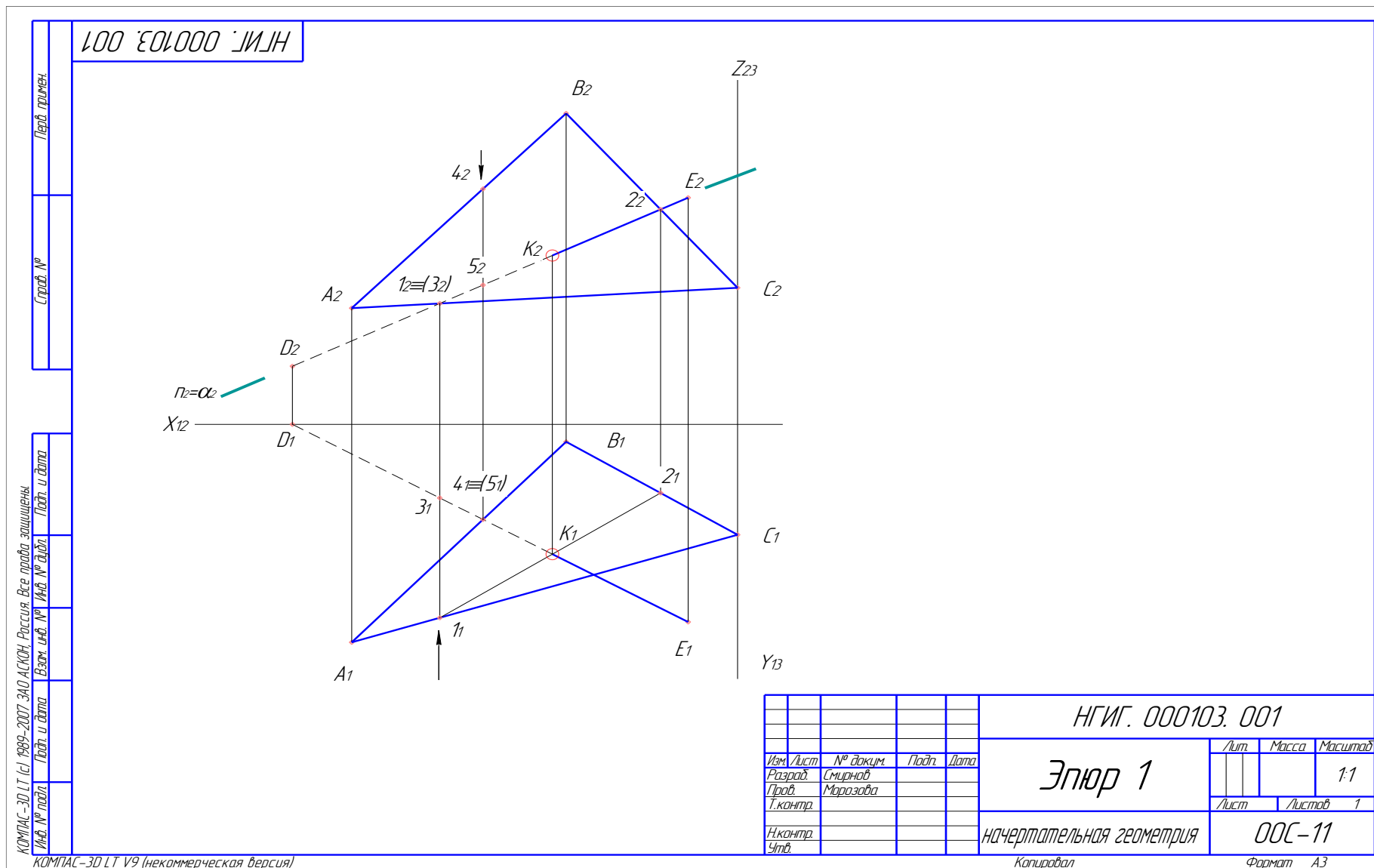


* При выполнении данного задания изображение увеличить в 5 раз.



* При выполнении данного задания изображение увеличить в 5 раз.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3





НГИГ. 000103. 103

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
Разработ	Смирнов			
Проект	Морозова			
Т.контр.				
Н.контр.				
Утв.				

НГИГ. 000103. 103		
Эпюр 1		
начертательная геометрия		
Лист	Масштаб	Масштаб
1	1:1	1:1
Лист	Листов	1
00С-11		Формат А3

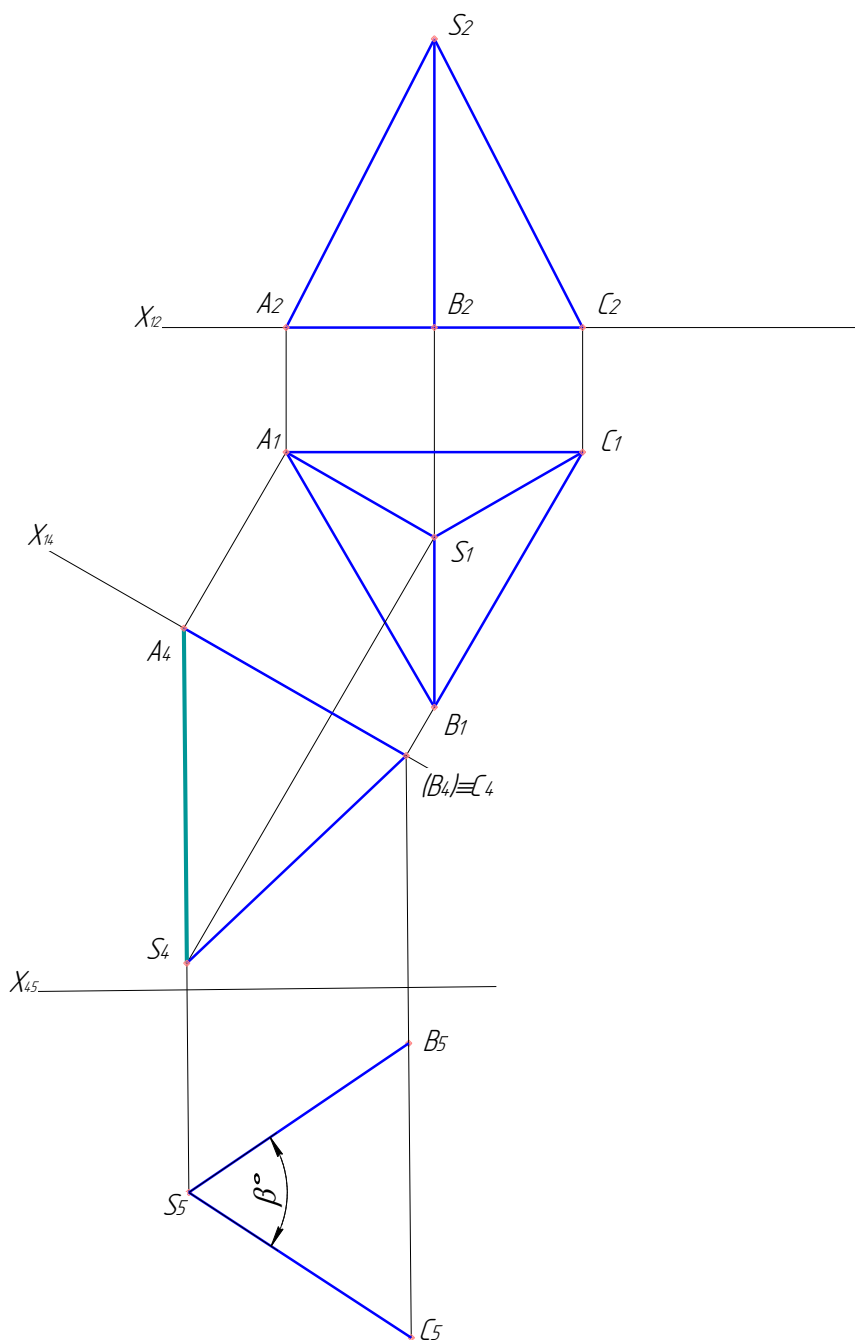
КОМПАС-3D LT V9 (некоммерческая версия)

КОМПАС-3D LT V9 (некоммерческая версия)

Копировал

Формат А3

27



				<i>НГИГ. 000103. 004</i>			
<i>Изм./Лист</i>	<i>№ докум.</i>	<i>Подп.</i>	<i>Дата</i>	<i>Экзюр 1</i>	<i>/лсм.</i>	<i>Масса</i>	<i>Максимум</i>
<i>Разработ.</i>	<i>Смирнов</i>						<i>1-1</i>
<i>Проб.</i>	<i>Марозова</i>						
<i>Технотр.</i>					<i>/лист</i>	<i>/листо в</i>	<i>1</i>
<i>Аконттр.</i>					<i>начертательная геометрия</i>		<i>ООС-11</i>
<i>Утв.</i>							

РЕШЕНИЕ ПОЗИЦИОННЫХ И МЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
Методические указания
к решению задач по дисциплине «Начертательная геометрия»
для студентов всех направлений очной и заочной форм обучения

ЧЕЛЫШЕВА Ирина Александровна

Подписано в печать

Формат 60x84 1/16

Бум. офсет.

Усл. печ. л.

Уч.-изд.л.

Тираж 100 экз.

Заказ

Бесплатно

Саратовский государственный технический университет

410054, Саратов, Политехническая ул., 77

Отпечатано в РИЦ СГТУ. 410054, Политехническая ул., 77